

**Други Годишњи сусрет  
семинара за топологију конфигурационих система**

Математички институт САНУ, Београд 24-27. децембар 2018.

Павле Благојевић, *Математички институт САНУ*, Београд, Србија

This lecture is dedicated to Žarko Mijažlović on the occasion of his 70th birthday

**Bisections by hyperplane arrangements**

In 2017 Barba, Pilz & Schnider considered particular and modified cases of the following hyperplane measure partition problem: For the given collection of  $j$  measures on  $\mathbb{R}^d$  find a  $k$ -element affine hyperplane arrangement that bisects each of them into equal halves simultaneously. They solved the problem affirmatively in the case when  $d = k = 2$  and  $j = 4$ . Furthermore, they conjectured that every collection of  $j$  measures on  $\mathbb{R}^d$  can be bisected with a  $k$ -element affine hyperplane arrangement provided that  $d \geq \lceil j/k \rceil$ . The conjecture was confirmed in the case when  $d \geq j/k = 2^a$  by Hubard and Karasev in 2018.

In this talk we give present a different proof of the Hubard and Karasev result using the framework of Blagojević, Frick, Haase & Ziegler (2016), based on the equivariant relative obstruction theory, that was developed for handling the Grünbaum–Hadwiger–Ramos hyperplane measure partition problem. Furthermore, this approach allowed us to prove even more, that for every collection of  $2^a(2h + 1) + \ell$  measures on  $\mathbb{R}^{2^a+\ell}$  there exists a  $(2h + 1)$ -element affine hyperplane arrangement that bisects them simultaneously.

(This is a joint work with Aleksandra Dimitrijević Blagojević, Roman Karasev and Jonathan Klien)

Михајло Цекић, *Макс-Планк институт за математику*, Бон, СР Немачка

**Билијардски ток и концентрација сопствених вредности лапласијана у полиедрима**

Нека је  $P$  конвексан полигон у простору  $\mathbb{R}^3$ . На овом предавању показаћемо како динамичке особине билијардског тока на  $P$ , имају последице на концентрацију сопствених вредности лапласијана у лимесу када енергија тежи

бесконачности. Прецизније, показаћемо да затворене орбите далеко од ивице леже у фамилији од коначно много имерзованих цилиндара, и као последицу дедуковати концентрацију масе близу ивица. Претходне студије су обухватале једноставнији случај полигона у равни. Засновано на заједничком раду са В. Georgiev и М. Mukherjee.

Димитрије Цицмиловић, *Универзитет у Бону*, Бон, СР Немачка

### **Symplectic non-squeezing theorem and Hamiltonian PDE**

The symplectic non-squeezing theorem of Gromov states that the existence of the symplectic embedding from the ball  $B_r(0) \subset \mathbb{C}^n$  into the cylinder  $\Sigma_R(0) = \mathbb{D}_R \times \mathbb{C}^{n-1}$  is equivalent to  $R \geq r$ .

In 2014, Sukhov and Tumanov presented a new proof of Gromov's theorem, which does not rely on pseudoholomorphic theory of Gromov, and which is generalizable to infinite dimensional Hilbert space. In the talk we present one such generalization and discuss possible applications to Hamiltonian PDE.

Далибор Даниловић, *Математички факултет УБ*, Београд, Србија

### **Кратки осврт на Кнесер-ову хипотезу**

Martin Kneser је 1955. године разматрао следећи комбинаторни проблем: *Ако имамо скуп од  $2n + k$  елемената, и скуп његових  $n$ -подскупова поделимо на  $k + 1$  скупова, тада постоји класа која садржи два дисјунктивна  $n$ -подскупа.* Решење које је 1978. понудио Л. Lovasz било је чисто тополошко, и може се сматрати пионирским радом у области тополошке комбинаторике. Циљ овог излагања је да изложимо Вагану-ево решење, и истакнемо неколико еквивалентних формулација ове хипотезе.

Богдан Ђорђевић, *Природно-математички факултет УН*, Ниш, Србија

### **Решавање Силвестерове операторске једначине и примене**

Матричне и операторске једначине облика

$$AX - XB = C$$

где су  $A$ ,  $B$  и  $C$  дата пресликавања на одговарајућим просторима, називају се Силвестерове једначине, у част Ј. Ј. Силвестера, који је 1885. године

поставио потребне и довољне услове да дата матрична једначина има јединствено решење. 1956. године је Розенблум те резултате проширио на случај када су  $A$ ,  $B$  и  $C$  ограничени линеарни оператори.

Постоје бројни резултати који се тичу конструкције (егзактног и приближног) јединственог решења, као и примене ове једначине у другим гранама математике (стабилност по Љапунову динамичких система, Ембријева теорема о комутативности, спектрални оператори и Путнам-Фогледова својства оператора, хипонормални оператори), физике, рачунарства, електротехнике, ...

Случај када  $A$ ,  $B$  и  $C$  нису ограничени оператори, а решења одговарајуће Силвестерове једначине нису јединствена, јесте лични допринос овој теми. Приказаћемо довољне услове за егзистенцију решења, приказати алгоритам за конструкцију општег решења, а потом илустровати примерима на диференцијалним и Штурм-Лиувилловим операторима.

Јелена Ивановић, *Архитектонски факултете УБ*, Београд, Србија

### **Geometrical realisation of the simple permutoassociahedron by Minkowski sums**

A family of simple polytopes named permutoassociahedra was introduced and realised by Baralić, Ivanović and Petrić as a family of polytopes denoted by  $\mathbf{PA}_n$ . Their explicit realisation with systems of inequalities representing halfspaces in  $\mathbf{R}^{n+1}$  was presented at the first annual meeting of TOPGEKOM Seminar one year ago. Since any realisation of this family has significant importance serving as a topological proof of Mac Lane's coherence, an alternative geometrical realisation which uses Minkowski sums will be presented for this occasion for the first time. In other words, this talk will introduce a family of simple  $n$ -polytopes obtained by Minkowski sums of particular polytopes which is combinatorially equivalent to  $\mathbf{PA}_n$ . And moreover, normally equivalent. Additionally, the same procedure can be used for realisation of other families of simple polytopes which could be obtained by truncations of the  $n$ -dimensional permutohedron in its proper faces.

Стефан Ивковић, *Математички институт САНУ*, Београд, Србија

### **On Fredholm theory and operators on Hilbert $C^*$ modules**

Fredholm theory on Hilbert and Banach spaces is today very developed with lot of the results. Hilbert  $C^*$  modules are generalizations of Hilbert spaces

obtained when scalars are replaced with the elements in a  $C^*$  algebra. Prof. Mishchenko has given a definition of Fredholm operator on Hilbert  $C^*$  modules and this definition is actually a generalization of a classical definition of Fredholm operator on a Hilbert space. In addition, prof. Mishchenko has shown that some of the main results in classical Fredholm theory on Hilbert spaces also hold when we consider this 'generalized Fredholm operator on a Hilbert  $C^*$  module. However, for a great part of well-known results from classical Fredholm theory on Hilbert spaces, it has not been investigated whether these results also hold if we consider instead these generalized Fredholm operators on Hilbert  $C^*$  modules. This was exactly the topic of the research which is going to be presented here. Inspired by prof. Mishchenko's definition of a Fredholm operator on a Hilbert  $C^*$  module, a definition of a semi Fredholm operators on Hilbert  $C^*$  module is given and it is proved that many of the results (sometimes with some minor modifications) from classical theory of semi Fredholm operators on Hilbert spaces also hold when we consider these generalized Fredholm and semi Fredholm operators on Hilbert  $C^*$  modules, the results that has not been investigated earlier by prof. Mishchenko. The proofs are quite often completely different from the proofs in the classical Fredholm theory on Hilbert spaces, but these proofs applies to a certain extent techniques from the proofs of prof. Mishchenko.

Филип Јекић, *Математички факултете УБ*, Београд, Србија

### **Persistent Homology and its Applications in Deep Learning**

Methods from Topological Data Analysis, e.g. Persistent Homology, enable us to obtain geometrical and topological shape from data. That information can be used as input to machine learning models to increase accuracy and improve performance. Topological signatures, which give summary representation of topological features, cannot be directly used by machine learning algorithms. We will present one method to map topological signatures to neural network, proposed in paper Deep Learning with Topological Signatures by C. Hofer et al.

Филип Јевтић, *Математички институт САНУ*, Београд, Србија

### **Канторовић-Рубинштајн политопи и Бирове сфере**

Показујемо да је Канторовић-Рубинштајн политоп метричког простора придруженог циклусу изоморфан Бировој сфери придруженој одговарајућем

симплицијалном комплексу „кратких скупова”. Продубљујући ово опажање доказујемо политопалност Бирових сфера придружених „threshold” симплицијалним комплексима.

Јелена Катић, *Математички факултет УБ*, Београд, Србија

### **Polynomial entropy and Morse gradient systems**

We present the definition and some properties of the topological and the polynomial entropy of a dynamical system. We also describe one method for computing the polynomial entropy in for the system with finitely many non-wandering points, and an application of this method to the Morse negative gradient system. This is a joint work with M. Perić.

Даница Косановић, *Макс-Планк институт за математику*, Бон, СР Немачка

### **Knot invariants and configuration spaces**

One approach to knot theory considers the space of embeddings  $Emb(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^3)$ , so that the knot invariants are given by locally constant functions on this space. On the other hand, some recent results of homotopy theory, more precisely, the embedding calculus of Goodwillie and Weiss, offer new tools for the study of embedding spaces. My talk will address connections of these two theories, especially using combinatorics of configuration spaces and some concrete geometric constructions.

Мирослав Максимовић, *Природно-математички факултет УП*, Косовска Митровица, Србија

### **О геодезијским линијама**

Геодезијске линије су оне линије на површи које нису геодезијски закривљене. Оне се могу одредити решавањем система диференцијалних једначина другог реда. На овом предавању ћемо видети њихов геометријски приказ на неким површима и представимо конструкцију површи које дају линију садрже као геодезијску. Улога геодезијских линија на површи се може упоредити са улогом праве линије у равни, због чега се често доводе у вези са најкраћим путем између две тачке на површи.

Јелена Марковић, *Математички факултет УБ*, Београд, Србија

## О Кемнитзовој хипотези

Кемнитзова хипотеза је формулисана као уопштење теореме Ердоша, Гинзбурга и Зива, која тврди да било како да направимо скуп од  $2n - 1$  целих бројева, имаћемо у њему подскуп кардиналности  $n$ , такав да је аритметичка средина тих бројева цео број. Генерално, занима нас који је то најмањи број целобројних тачака у Еуклидском простору димензије  $k$ , такав да како год да изаберемо те тачке можемо да тврдимо да у њему постоји подскуп од  $n$  тачака чије тежиште има целобројне координате. Испоставило се да је већ за раван тешко одредити ту вредност. Кристијан Рајхер је показао да је у равни тај број  $4n - 3$ . На излагању ће бити представљен овај рад, али и неке додатне ствари везане за ову тему.

Лука Милићевић, *Математички институт САНУ*, Београд, Србија

## Нова горња оцена у Рамзијевом проблему у решетки

Решетка реда  $N$  је производ два комплетна графа реда  $N$ , тј. граф чији су чворови уређени парови бројева у  $[N]$ , са гранама између парова који имају исти први или други елемент. У првом случају грану називамо вертикалном, а у другом хоризонталном. Правоугаоник у решетки је четворка чворова облика  $(a, c), (b, c), (a, d), (b, d)$ . Рамзијев проблем у решетки је да се за дато  $r$  одреди најмање  $N = N(r)$  такво да свако бојење грана решетке реда  $N$  у  $r$  боја постоје правоугаоник и боје  $c_1$  и  $c_2$  такве да су вертикалне гране правоугаоника обојене бојом  $c_1$ , а хоризонталне бојом  $c_2$ . У овом предавању цемо представити нову горњу оцену за  $N$ . Доказ је базиран на квази-случајним графовима.

Нела Милошевић, *Факултет за информационе системе и технологије УДГ*, Подгорица, Црна Гора

## Homotopy type of certain simplicial complexes associated with the cyclotomic polynomial

Coefficients of the cyclotomic polynomial have an interesting topological interpretation in terms of homology of a certain simplicial complex associated with the degree of the cyclotomic polynomial, which was studied by Musiker and Reiner [J. Reine Angew. Math., 687 (2014)]. We answer an open questions posed by the two authors regarding homotopy type of certain subcomplexes of this associated simplicial complex, when the degree of the cyclotomic polynomial is a product of three distinct primes.

Зоран Ракић, *Математички факултете УБ*, Београд, Србија

### **Duality principle in Osserman manifolds**

Let  $(M, g)$  be a pseudo-Riemannian manifold, with curvature tensor  $R$ . The Jacobi operator  $R_X$  is the symmetric endomorphism of  $T_pM$  defined by  $R_X(Y) = R(Y, X)X$ . In Riemannian settings, if  $M$  is locally a rank-one symmetric space or if  $M$  is flat, then the local isometry group acts transitively on the unit sphere bundle  $SM$  and hence the eigenvalues of  $R_X$  are constant on  $SM$ . Osserman in the late eighties, wondered if the converse held; this question is usually known as the *Osserman conjecture*.

In the first part of the lecture we will give an overview of Osserman type problems in the pseudo-Riemannian geometry. The second part is devoted to the equivalence of the Osserman pointwise condition and the duality principle. This part of the lecture consists of the recent results, which are obtained in collaboration with Yury Nikolayevsky and Vladica Andrejić.

Ерика Ролдан Роа, *Центар за математичка истраживања*, Гванахуато, Мексико

### **ТВА**

Никола Садовек, *Математички факултете УБ*, Београд, Србија

### **Број темена минималне триангулације**

На овом предавању цемо изложити доњу оцену за број темена триангулације користећи тзв. покривачки тип (covering type) простора, који представља једну хомотопску инваријанту, а који се на леп начин даље повезује са одређеним својствима производа кохомолошких класа. У зависности од времена, биће дате оцене за број темена минималне триангулације неких Грасманијана.

Срђан Стефановић, *Математички факултете УБ*, Београд, Србија

### **Duality for crossed products of von Neumann algebras**

Von Neumann algebras are one of the most important areas of research within the operator theory. Their expansion was felt in the seventies of the last century in the works of authors M. Takesaki, U. Haagerup, A. Van Daele,

A. Connes and others. In presentation, we will introduce all necessary terms and describe construction of crossed product of von Neumann algebra  $\mathcal{M}$  and a locally compact abelian group  $G$ . We will prove that second crossed product  $(\mathcal{M} \rtimes_{\alpha} G) \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G}$  is isomorphic to tensor product  $\mathcal{M} \otimes B(L^2(G))$ , where  $\hat{G}$  is dual group of  $G$  and  $\alpha$  and  $\hat{\alpha}$  are action of  $G$  and dual action of  $\hat{G}$ , respectively. This result played an important role in the classification of factors of type III, for which, among other things, Alain Connes received a Fields medal.

Иван Танасијевић, *Универзитет у Кембриџу*, Кембриџ, Уједињено краљевство

### **Активне честице у елипсоидним вртлозима**

Предавање ће се састојати из три главна дела. Први део представља увод у тематику кретања активних честица у вискозним токовима тј. при малом Рејнолдсовом броју, као и мотивацију за посматрање проблема из наслова. У другом делу, фокус се пребацује на елипсоидне вртлоге и на доказ да се честице облика осно-симетричног елипсоида са трансляторним погоном крећу по орбитама са ограниченим одстојањем од центра вртлога. Последњи део предавања ће бити посвећен увођењу стохастичких ефеката у проблем као што су трансляторно и ротационо Брауново кретање честица и њихов утицај на претходно презентовани доказ.

Александар Вучић, *Математички факултет УБ*, Београд, Србија

### **Dodecahedron from the Toric Topology point of view**

Борђе Жикелић, *Институт за науку и технологије*, Беч, Аустрија

### **Termination of (probabilistic) programs**

Probabilistic programs provide a rich framework for modeling various problems and their applications in different areas of computer science, and at the moment there exists a great interest in their formal analysis. In this talk we will introduce the problem of termination of probabilistic programs as one of the basic liveness properties of programs. We will start with a brief overview of existing methods for proving termination of classical imperative programs, which are based on the idea of ranking functions. Subsequently, the focus of

the talk will be probabilistic programs, and methods for proving their termination which are based on generalizations of the idea of ranking functions, mainly using the results from the theory of martingales. In the rest of the talk we will present some of the more recent results, mainly the concepts of ranking and repulsing supermartingales as well as polynomial algorithms for synthesizing them in the case of affine probabilistic programs.