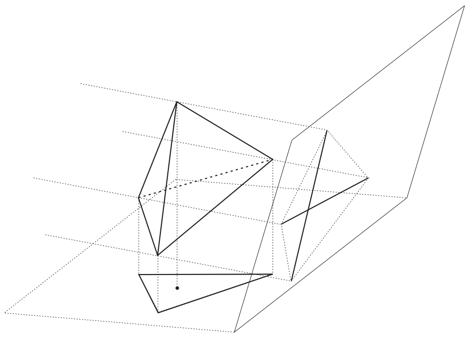
Торусна топологија

20. јануар 2010

РадеедаР

Симплекси, симплицијални комплекси, триангулације итд.



Ја сам симплекс троугласте сенке
Смерни атом васколиког Мира
Конвексности древне проповедник
Плод заноса креде и лењира.

....

Симплексна су сад дошла времена
Симплексу се скандира и свира
Број и Симплекс два страшна симбола
Који од њих Миром доминира!?

ЦГТА семинар

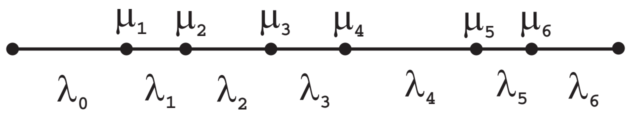
У роману „Непобедиви”, Станислав Лем (аутор *Солариса*), супротставља органском свету базираном на угљоводоницима механички свет базиран на “симплексима” који попут механичких инсеката формирају “ројеве” (симплицијалне комплексе!).

Аналогија са органским светом је сасвим јасна с обзиром да нејједноставнији угљоводоник метан има форму 3-димензионалног симплекса (тетраедра). Дакле симплекс заиста јесте „смерни атом”који формира сложене геометријске форме.

Симплекс дефинисан као конвексни омотач скупа афино независних тачака,

$$\sigma = \operatorname{conv}\{a_0, a_1, \ldots, a_n\} = \{\lambda_0 a_0 + \ldots + \lambda_n a_n \mid \lambda_j \geq 0,\ \lambda_0 + \ldots + \lambda_n = 1\}$$

има две природне координатизације. Први систем координата су *барицентричне координате* $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$. С обзиром на услове $\lambda_j \geq 0$ и $\lambda_0 + \ldots + \lambda_n = 1$



ови бројеви се природно интерпретирају као дужине малих интервала добијених поделом јединичног интервала $[0, 1]$ уз помоћ деоних тачака $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots \leq \mu_n$ где је

$$\mu_1 = \lambda_0, \quad \mu_2 = \lambda_0 + \lambda_1, \quad \ldots \quad , \quad \mu_n = \lambda_0 + \ldots + \lambda_{n-1}.$$

На тај начин се успоставља бијекција између скупова A_n и B_n,

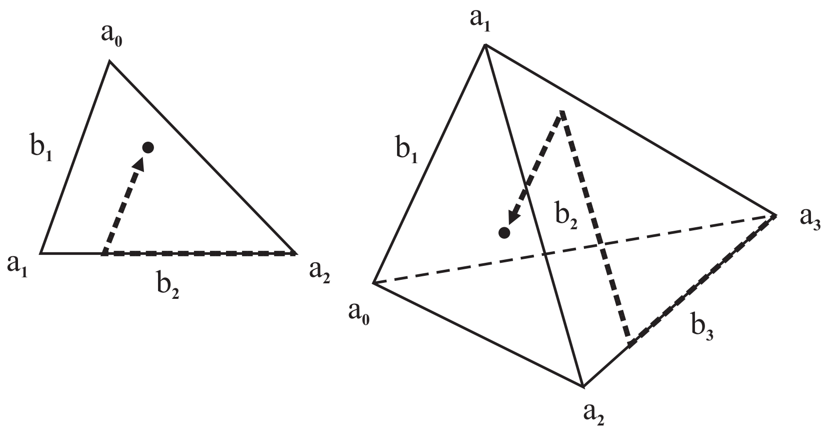
$$A_n = \{\lambda \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \lambda_j \geq 0,\ \lambda_0 + \ldots + \lambda_n = 1\} \quad B_n = \{\mu \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots \leq \mu_n\}$$

и систем бројева $\mu_1, \ldots, \mu_n$ даје координате које зовемо *уређене координате*.

Позната елементарна *Абелова трансформација* (дискретна формула "парцијалне интеграције") даје нам једнакост

$$\lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n = \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \ldots + \mu_n b_n + a_n$$

где је $b_1 = a_0 - a_1, b_2 = a_1 - a_2, \ldots, b_n = a_{n-1} - a_n$.



Лема о муњи: Нека су $c_1, c_2, \ldots, c_n$ линеарно независни вектори у $\mathbb{R}^d$ и нека је $p \in \mathbb{R}^d$ произвољна тачка. Нека је $L \subset \mathbb{R}^d$ изломљена линија (муња) која полази из p чија су остала темена $p + c_1, p + c_1 + c_2, \ldots, p + c_1 + \ldots + c_n$. Тада је конвексни омотач $\sigma := \operatorname{conv}(L)$ симплекс и свака његова тачка $x \in \sigma$ је погођена јединственом „мујњом”L_ν за неке параметре $1 \geq \nu_1 \geq \nu_2 \geq \ldots \geq \nu_n \geq 0$, тј. важи једнакост

$$x = p + \nu_1 c_1 + \nu_2 c_2 + \ldots + \nu_n c_n.$$

Дефиниција: Разбијање геометријске форме на симплексе који правилно належу један на други назива се *триангулација*. Кажемо да симплекси правилно належу један на други уколико су или дисјункти или се секу по заједничкој страни.

Задаци

1. (Триангулација куба)
Нека је S_n скуп свих пермутација скупа $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$. Свакој пермутацији $\pi \in S_n$ доделимо симплекс

$$\sigma_\pi := \text{ conv}\{0, e_{\pi(1)}, e_{\pi(1)} + e_{\pi(2)}, \ldots, e_{\pi(1)} + e_{\pi(2)} + \ldots + e_{\pi(n)}\}.$$

Доказати да фамилија $\{\sigma_\pi\}_{\pi \in S_n}$ дефинише једну *триангулацију* јединичног куба $[0, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$ тј. да важи,

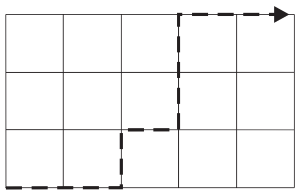
(1) $[0, 1]^n = \bigcup_{\pi \in S_n} \ \sigma_\pi$;

(2) Два разна симплекса σ_{π_1} и σ_{π_2} су или дисјунктна или се секу по заједничкој страни.

Уверити се да је σ_π може еквивалентно описати као скуп решења система неједначина

$$0 \leq x_{\pi(1)} \leq x_{\pi()} \leq \ldots \leq x_{\pi(n-1)} \leq x_{\pi(n)} \leq 1.$$

2. (Триангулација производа два симплекса)
Искористити „Лему о мујњи”за доказ да се производ два симплекса Δ^p и Δ^q може триангулисати тако да сваком симплексу одговара десно-горе неопадајућа путања у шаховској табли димензија $p \times q$.



3. За сваки $n \in \mathbb{N}$ одредити k, $1 \leq k \leq n$, тако да запремина полиедра

$$P_{n,k} := \{x \in [0, 1]^n \mid x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_k \geq x_{k+1} \geq \ldots \geq x_n\}$$

има највећу вредност.

4. Да ли се јединични куб $[0,1]^n$ може триангулисати без додавања нових темена на строго мање од $n!$, n-димензионалних симплекса.

5. Да ли се сваки конвексни политоп може триангулисати без додавања нових темена!?

6. Генералисати тврђење из задатка 2 на случај производа неколико симплекса.

7. Сваком коначном парцијално уређеном скупу P додељен је симплицијални комплекс $\Delta(P)$ чија су темена елементи од P а симплекси су сви ланци у P. Ланац $L \subset P$ је по дефиницији подскуп облика $L = \{x_0 \prec x_1 \prec \ldots \prec x_k\}$. Доказати да важи

$$\Delta(P \times Q) \cong \Delta(P) \times \Delta(Q).$$

Уверити се да су и задатак 1 и задатак 2 специјални случајеви овог тврђења.