УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
Бр. 154/2
07. 04. 20 23 год.
Београд, Студентски трг 16
Тел. 20 27 801, Факс: 26 30 151

Изборном већу
Математичког факултета
Универзитета у Београду

Одлуком Изборног већа Математичког факултета Универзитета у Београду, донетој на 107. поновљеној седници одржаној 24. фебруара 2023. године, именовани смо за чланове Комисије за писање извештаја о кандидатима који учествују на конкурсу за избор у звање и на радно место **једног доцента** за ужу научну област Алгебра и математичка логика, на одређено време од 60 месеци, са пуним радним временом. На конкурс, објављен 8. марта у листу „Послови", Националне службе за запошљавање, пријавио се један кандидат: **др Драган Ђокић**. Комисија, на основу приложене документације, подноси Изборном већу Математичког факултета следећи

ИЗВЕШТАЈ

1 Биографија

Др Драган Ђокић је рођен 24. фебруара 1992. године у Лесковцу. Основне академске студије на Математичком факултету у Београду, на смеру Теоријска математика и примене, уписао је 2011. године и завршио их 2015. године са просечном оценом 10. Мастер студије на Математичком факултету је завршио 2016. године са просечном оценом 10 одбранивши мастер рад под насловом „Аритметика целобројних Аполонијевих конфигурација кругова" под менторством проф. др Горана Ђанковића. Добио је Награду Математичког института Српске академије наука и уметности за најбољи мастер рад у области математике и механике. Након тога је уписао докторске студије на истом факултету и положио све испите са просечном оценом 10. Докторску дисертацију под насловом „Шести момент Дирихлеових L-функција над рационалним функцијским пољима" одбранио је 3. марта 2023. године, под менторством проф. др Горана Ђанковића.

Запослен је на Катедри за алгебру и математичку логику Математичког факултета од 2015. године, најпре као сарадник у настави, а од 2017. као асистент. Држао је вежбе из предмета: Теорија бројева 1, Теорија бројева 2, Линеарна алгебра, Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, Алгебра 1, Алгебра 2, Дискретна математика, Методика наставе математике и рачунарства и Методика наставе математике А. Његов рад у настави је на студентским анкетама у последњих пет година оцењен са: 4.79, 4.81, 4.74, 4.72 и 4.74 (редом од школске 2017./2018. до 2021./2022. године). Написао је скрипта (помоћни материјал за вежбе) „Линеарна алгебра" (343 стране), доступна на `https://poincare.matf.bg.ac.rs/~dragan.djokic/dragan_djokic_linearna_algebra.pdf`.

Одржао је приступно предавање под насловом „Гаусов закон квадратног реципроцитета" 7. априла 2023. године, које је Комисија оценила просечном оценом 5.

Био је члан пројекта 174012 Министарства науке, технолошког развоја и иновација Републике Србије, под називом „Геометрија, образовање и визуелизација са применама", од 2016. до 2020. године.

2 Научни рад

Научни рад др Драгана Ђокића припада аналитичкој теорији бројева и специјално, теорији L-функција над функцијским пољима. Кандидат је до сада објавио 6 радова у часописима са SCI листе, од којих је 1 самосталан.

2.1 Списак радова

[1] G. Djanković, D. Đokić: *The sixth moment of Dirichlet L-functions over rational function fields*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 514(1): 126296, 42 p., 2022., ISSN: 0022-247X, DOI: 10.1016/j.jmaa.2022.126296, IF 2021: 1.417, M21.

[2] G. Djanković, D. Đokić, N. Lelas: *The triple reciprocity law for the twisted second moments of Dirichlet L-functions over function fields*, Proceedings of the American Mathematical Society, 149: 2851–2860,

2021., ISSN: 0002-9939, DOI: 10.1090/proc/15507, IF 2020: 0.971, M22.

[3] G. Djanković, D. Đokić: *The mixed second moment of quadratic Dirichlet L-functions over function fields*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 51(6): 2003–2017, 2021., ISSN: 0035-7596, DOI: 10.1216/rmj.2021.51.2003, IF 2021: 0.813, M23

[4] D. Đokić, N. Lelas, I. Vrećica: *Large values of Dirichlet L-functions over function fields*, International Journal of Number Theory, 16(5): 1081–1109, 2020., ISSN: 1793-0421, DOI: 10.1142/S1793042120500566, IF 2020: 0.674, M23.

[5] D. Đokić: *A Note on the distribution of angles associated to indefinite integral binary quadratic forms*, Czechoslovak Mathematical Journal, 69(2): 443–452, 2019., ISSN: 0011-4642, DOI: 10.21136/CMJ.2018.0370-17, IF 2019: 0.412, M23.

[6] G. Djanković, D. Đokić, N. Lelas, I. Vrećica: *On some hybrid power moments of products of generalized quadratic Gauss sums and Kloosterman sums*, Lithuanian Mathematical Journal, Vol. 58, No. 1 (2018), pp. 1 - 14, ISSN: 0363-1672, DOI: 10.1007/s10986-018-9383-6, IF 2018: 0.566, M22.

2.2 Приказ радова

Проучавање расподеле величине L-функција придружених неким добро дефинисаним фамилијама аритметичких објеката (аутоморфних репрезентација), и њихових момената, на критичној линији или у централној тачки, један је од кључних циљева аналитичке теорије бројева и уско је повезано са Линделефовом хипотезом. Овом тематиком се баве прва четири рада са списка.

[1] The sixth moment of Dirichlet L-functions over rational function fields

Асимптотску формулу за други момент Риманове зета функције на критичној линији извели су Харди и Литлвуд, а за четврти момент Ингам пре стотинак година. Аналогни резултати за више моменте нису познати и већ шести момент представља један од чувених отворених проблема у области. Предмет проучавања у раду [1] је фамилија Дирихлеових L-функција над рационалним функцијским пољима $\mathbb{F}_q(\mathrm{x})$, где је $\mathbb{F}_q$ коначно поље, која, као и Риманова зета функција, има *унитарну* симетрију. Добијена је асимптотска формула за шести момент

$$\sum_{Q\in\mathcal{M}_{\mathrm{d}}}\ \sideset{}{^b}\sum_{\chi\,(\mathrm{mod}\,Q)}\int_0^{\frac{2\pi}{\log q}}\left|L\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right)\right|^6\frac{dt}{\frac{2\pi}{\log q}}\sim\frac{42\,\widetilde{a}_{3,q}}{9!}\frac{q-2}{q-1}q^{2\mathrm{d}}\mathrm{d}^9,$$

кад степен полинома $\mathrm{d}\to\infty$, где је аритметички фактор $\widetilde{a}_{3,q}$ експлицитно израчунат. Примењена су усредњења по критичном кругу (јер су L-функције над $\mathbb{F}_q(\mathrm{x})$ периодичне), по непарним примитивним Дирихлеовим карактерима по модулу Q и по моничним полиномима Q фиксираног степена d. Сва ова три усредњења су тренутно неопходна, јер је шести момент са мање усредњења и даље отворено питање. Са друге стране, овакво усредњење Дирихлеових карактера по различитим модулима је мотивисано класичном поставком теореме Бомбијери-Виноградова. Додатно, изведена је и асимптотска формула за шести момент са комплексним померајима, као уопштење претходног проблема. Овакве флексибилније формуле имају разне примене, на пример за израчунавање момената виших извода и слично. У поређењу са аналогним резултатом над пољем $\mathbb{Q}$ (J. B. Conrey, H. Iwaniec, K. Soundararajan, The sixth power moment of Dirichlet L-functions, Geometrical and Functional Analysis, 22: 1257–1288, 2012.) рад [1] доноси два побољшања: оштрију оцену за грешку и експлицитнији израз за главни члан. Такође, у главном члану је идентификована константа и потврђено њено поклапање са хипотетичком константом изведеном применом Теорије случајних матрица.

[2] The triple reciprocity law for the twisted second moments of Dirichlet L-functions over function fields

У овом раду је разматран нормализован други момент Дирихлеових L-функција по фамилији свих (не)парних примитивних карактера по простом модулу Q над функцијским пољима:

$$\mathcal{S}^{\pm}(H,K;Q)=\frac{|Q|^{1/2}}{\varphi^{\pm}(Q)}\sideset{}{^\pm}\sum_{\substack{\chi\,(\mathrm{mod}\,Q)\\ \chi\neq\chi_0}}\left|L\left(\frac{1}{2},\chi\right)\right|^2\chi(H)\overline{\chi}(K),$$

у који су „уплетена“ још два полинома H и K. Разумевање оваквих 'твистованих' момената је основа за кључне аналитичке методе у теорији L-функција: метод молификације (са применама на неанулирање L-функција), метод амплификације (са применама на сабконвексне оцене за L-функције), метод резонанције (за налажење екстремних вредности L-функција) и сличне. У раду је доказано да за просте полиноме H, K и Q, такве да је $\deg H + \deg K \leq \deg Q$ важи

$$S^{\pm}(H,K;Q) = S^{\pm}(K,\pm Q;H) + S^{\pm}(H,\pm Q;K) + O\left(\frac{|Q|^{1/2}\deg Q}{|HK|^{1/2}}\right),$$

при чему је и O-члан експлицитно израчунат у оба случаја. Овај резултат даје симетрију између три 'твистована' момента за модуле H, K и Q, а релација је названа 'троструки реципроцитет' по узору на Гаусов закон квадратног реципроцитета за Лежандрове симболе.

[3] The mixed second moment of quadratic Dirichlet L-functions over function fields

У овом раду се изучава фамилија квадатних Дирихлеових карактера (што су једини нетривијални реални карактери) за моничне бесквадратне полиномне модуле $D \in \mathbb{F}_q[t]$ степена $2g+1$, где је целобројни параметар g уједно и род хиперелиптичке криве $X^2 = D(Y)$ над $\mathbb{F}_q$. У раду се проучавају мешовити други моменти виших извода у централној тачки облика $\sum_{D\in\mathcal{M}_{2g+1}} \Lambda^{(\lambda)}\left(\frac{1}{2},\chi_D\right)\Lambda^{(\mu)}\left(\frac{1}{2},\chi_D\right)$, кад род $g\to\infty$, где је Λ тзв. комплетирана L-функција. Овакви мешовити моменти такође имају дугу историју проучавања, а у класичном случају Риманове зета функције су повезани са резултатима о расподели нула зета функције. На пример, у раду [3] је добијена асимптотска формула кад $g\to\infty$

$$\sum_{\substack{D\in\mathcal{M}_{2g+1}\\ D \text{ бесквадратан}}} \frac{\Lambda''\left(\frac{1}{2},\chi_D\right)\Lambda\left(\frac{1}{2},\chi_D\right)}{(\log q)^2} = \frac{q^{2g+1}}{\zeta_q(2)}P(2g+1) + O\left(q^{g(1+\varepsilon)}\right),$$

где је $P(x)$ у главном члану полином степена 5 чији су коефицијенти експлицитно израчунати. Као последица овог резултата добијено је да постоји бар $\gg \frac{q^{2g+1}}{g^4}$ бесквадратних моничних полинома $D\in\mathbb{F}_q[t]$ степена $2g+1$, таквих да је истовремено и $\Lambda\left(\frac{1}{2},\chi_D\right)\neq 0$ и $\Lambda''\left(\frac{1}{2},\chi_D\right)\neq 0$. Истовремено неанулирање извода L-функција у централној тачки је и једна од мотивација за изучавање мешовитих момената. Општије, ред нуле L-функције у централној тачки је предмет Берч-Свинертон-Дајерове и Бејлинсон–Делињеве хипотезе.

[4] Large values of Dirichlet L-functions over function fields

Један значајан аспект у проучавању Дирихлеових L-функција (а самим тим и простих бројева) је и разумевање величине L-функција у критичној траци. Са једне стране, имамо горња ограничења ових величина која следе из Генералисане Риманове хипотезе, као и Линделефову хипотезу која говори о величини L-функција на критичној линији. Са друге стране, природно је поставити и питање која је највећа вредност функције $L(s,\chi)$ за коју смо сигурни да ће се појавити када варирамо Дирихлеов карактер χ по фиксираном модулу Q. У прошлости су коришћене разне технике за добијање оваквих екстремалних вредности, као што су диофантске апроксимације или моменти L-функција, а најефикаснијим се показао метод резонатора, који је први употребио Вороњин, а затим усавршио Саундарарајан. У овом раду су разматрана аналогна питања за L-функције над рационалним функцијским пољима. Методом тзв. 'дугог резонатора' показано је да за сваки иредуцибилни полином $Q\in\mathbb{F}_q[x]$ довољно великог степена, постоји нетривијалан Дирихлеов карактер χ по модулу Q такав да важи

$$L(1,\chi) \geq e^{\gamma}\left(\log_q \deg Q + \log_q\log_q \deg Q - C - \varepsilon\right),$$

где је γ Ојлер-Маскеронијева константа и C константа која је експлицитно израчуната и зависи само од q, кардиналности коначног поља $\mathbb{F}_q$. Показано је и да позитивна пропорција свих Дирихлеових карактера задовољава претходни услов. Додатно, изведен је сличан резултат и за екстремне вредности $L(\sigma,\chi)$, за свако $\sigma\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ унутар критичне траке. У случају централне вредности, односно за $\sigma=\frac{1}{2}$, метод дугог резонатора не ради. Тај случај је засебно третиран помоћу сума Галовог типа, које су се прво појавиле у теорији метричких диофантских апроксимација у вези са Дафин-Шеферовом хипотезом.

[5] A note on the distribution of angles associated to indefinite integral binary quadratic forms

У овом раду је разматран један геометријски проблем методама теорије бројева. Свакој индефинитној бинарној квадратној форми Q са целобројним коефицијентима се може придружити геодезијска линија $\mathcal{G}_Q$ у хиперболичкој полуравни која спаја корене једначине $Q(X, 1)$ (који се налазе на рубу те полуравни). За сваку фиксирану фундаменталну дискриминанту Δ имамо скуп $\mathcal{H}(\Delta)$ свих (претходно описаних) форми квадратних форми Q дискриминанте Δ. На скуп $\mathcal{H}(\Delta)$ дејствује група $SL_2(\mathbb{Z})$, тако да свака орбита садржи по једну *редуковану* форму $Q \in \mathcal{H}(\Delta)$, која има по један корен у интервалима $(-\infty, -1)$ и $(0, 1)$. Зато се, за фиксирану вертикалну геодезијску линију $p_t : \Re z = t$, за неко $t \in (-1, 0)$, редукованој квадратној форми $Q \in \mathcal{H}(\Delta)$ може придружити добро дефинисан угао између геодезијских линија $\mathcal{G}_Q$ и p_t. У овом раду је описана асимптотска расподела тог угла, кад Q варира по скупу $\mathcal{H}(\Delta)$, где $\Delta \to \infty$ по непарним фундаменталним дискриминантама. Доказ се заснива на теореми Дјук-Фридландер-Ивањеца за Вејлове суме по коренима квадратне конгруенције.

[6] On some hybrid power moments of products of generalized quadratic Gauss sums and Kloosterman sums

У овом раду су разматране разне корелације уопштених квадратних Гаусових сума по модулу q са Клостермановим сумама и/или са специјалним вредностима Дирихлеових L-функција. Добијено је више тачних и асимптотских формула када је модул q прост или степен простог броја. Између осталог, показано је да за све просте бројеве $p \equiv 3 \pmod 4$, природне бројеве k и целе бројеве n такве да $(n, p) = 1$ важи

$$\sum_{\substack{\chi \,(\mathrm{mod}\, p) \\ \chi \neq \chi_0}} \sum_{m \,(\mathrm{mod}\, p)} \left|G\left(m, \chi^2; p\right)\right|^2 \left|S\left(m, n, \chi; p\right)\right|^2 \left|L(1, \chi)\right|^{2k}$$
$$= 2\zeta^{2k-1}(2)\, \frac{(p-1)^{2k}(p+1)^{2k-1}(p-2)}{p^{4k-4}} \prod_{\substack{q \text{ прост} \\ q \neq p}} \left(1 - \frac{\binom{2k-2}{k-1}}{p^2}\right) + O\left(p^{3+\varepsilon}\right),$$

кад $p \to \infty$.

2.3 Саопштења на конференцијама

[1] Д. Ђокић: *Шести момент Дирихлеових L-функција над рационалним функцијским пољима*, II конгрес младих математичара, Нови Сад, 29. септембар - 1. октобар 2022.

[2] D. Đokić: *The sixth moment of Dirichlet L-functions over rational function fields*, XXI Geometrical Seminar, Belgrade, June 26 - July 2 2022.

[3] G. Djanković, D. Đokić: *The sixth moment of Dirichlet L-functions over rational function fields*, Symposium "Mathematics and Applications", Belgrade, December 3 - 4 2021.

[4] G. Djanković, D. Đokić, N. Lelas, I. Vrećica: *The fourth moment and large values of Dirichlet L-functions over rational function fields*, X Symposium "Mathematics and Applications", Belgrade, December 6 - 7 2019.

[5] D. Đokić: *Distribution of the angles associated to indefinite integral binary quadratic forms*, XX Geometrical Seminar, Vrnjačka Banja, May 20 - 23 2018.

2.4 Учешћа у летњим школама и конференцијама

[1] Automorphic Forms Summer School, Budapest, August 29 - September 2 2022.

[2] Building Bridges: 5th EU/US Summer School + Workshop on Automorphic Forms and Related Topics, Sarajevo, August 1 - 13 2022.

[3] A Workshop on Moments of L-functions, Northern British Columbia, July 25 - 29 2022.

[4] 50 Years of Number Theory and Random Matrix Theory Conference, Institute for Advanced Study, Princeton, June 21 - 24 2022.

[5] SSANT2021 Summer School in analytic number theory, Paris, June 28 - July 2 2021.

[6] Hausdorff Summer School: Polynomial Methods, Bonn, June 7 - 17 2021.

[7] Hausdorff Summer School: The Circle Method - Entering its Second Century, Bonn, May 10 - 21 2021.

[8] Hausdorff Summer School: L-functions - Open problems and current methods, Bonn, June 25 - 29 2018.

[9] XIX Geometrical Seminar, Zlatibor, August 28 - September 4 2016.

3 Закључак

Др Драган Ђокић испуњава научне и стручне критеријуме за избор у звање доцента. До сада је објавио шест радова у часописима са SCI листе, од тога један самосталан. Резултате је саопштио на пет научних конференција. Његов педагошки рад карактерише одговорност према обавезама, озбиљност и посвећеност, о чему сведоче и високе оцене на студентским анкетама.

На основу свега наведеног, како су испуњени и сви формални услови, предлажемо Изборном већу Математичког факултета Универзитета у Београду да изабере **др Драгана Ђокића** у звање и на радно место **доцента** за ужу научну област **Алгебра и математичка логика**, на одређено време од 60 месеци, са пуним радним временом.

У Београду, 7. априла 2023. године

Чланови комисије:

др Зоран Петровић, редовни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Горан Ђанковић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Драган Станков, ванредни професор
Универзитет у Београду, Рударско-геолошки факултет