Математички факултет у Београду

Студентско такмичење из математике, 25.04.2015.

МАТФ 2015.

На Математичком факултету у Београду у суботу 25.04.2015. је одржано студентско такмичење из математике. Након одлуке да се организује такмичење Хакатон, дошло је до иницијативе да се организују и такмичења из програмирања и математике.

Ове године је такмичење из математике организовано само за ученике прве две године факултета. У избору задатака и/или прегледу учествовали су Миљан Кнежевић, Ђорђе Кртинић и Зоран Петровић, а такмичило се 6 студената прве и друге године:

1. Лукић Катарина, ММ 6/13

2. Грбић Бранко, ММ 53/14

3. Дробњак Душан, ММ 43/14

4. Перић Никола, МР 28/14

5. Станковић Стефан, ММ 26/14

6. Стокић Максим, ММ 120/14

и решавали 6 задатака. Задаци и решења се могу наћи у наставку текста.

Након одржаног такмичења комисија је прегледала радове и прогласила најбоље студенте. Награђени студенти су:

Дробњак Душан, **I** награда

Лукић Катарина, **II** награда

Стокић Максим, **III** награда

Надамо се да ће такмичење допринети да се повећа ниво знања код студената, да неће остати само на овогодишњем издању и да ће наредних година бити веће заинтересованости и код студената и код наставног особља.

На крају користимо прилику да се захвалимо иницијаторима, спонзорима, као и људима који су потпомогли организацију такмичења (пре свега колегама са катедре за рачунарство).

Математички факултет у Београду

Студентско такмичење из математике, 25.04.2015.
млађа категорија

1. Нека је V еуклидски векторски простор димензије $n > 1$ и H хиперраван у V. Доказати или оповргнути:

> постоји $n+1$ вектора у V, који су сви са исте стране хиперравни H и који међусобно заклапају тупе углове.

2. Нека је $(a_n)_{n \geqslant 1}$ низ ненегативних реалних бројева, тако да је $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ и нека је $S_m = \sum_{m|k} a_k$. Одредити све низове за које важи $S_1 = mS_m$ за свако $m \in \mathbb{N}$.

3. Нека је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ два пута диференцијабилна функција. Ако важи $|f''(x)| \leqslant 2$ за свако $x \in (0, 1)$, доказати да је $|f'(x)| \leqslant |f(1) - f(0)| + 1$ за свако $x \in (0, 1)$.

4. Нека су $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ такве да је $\det B \neq 0$, $AB = BA$ и $|\det(A + \omega B)| = 1$ ако је $|\omega| = 1$. Доказати да је $A^n = 0$. Важи ли тврђење без претпоставке о комутативности?

5. Нека је $(G, +)$ коначна Абелова група, $n(G)$ број њених елемената, а $p(G)$ број различитих бинарних операција $\circ$ на G, таквих да је $(G, +, \circ)$ прстен са јединицом.

(а) Да ли постоји $(G_k)_{k \in \mathbb{N}}$ тако да је $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{n(G_k)}{p(G_k)} = 0$?

(б) Да ли постоји $(G_k)_{k \in \mathbb{N}}$ тако да је $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{n(G_k)}{p(G_k)} = \infty$?

6. Нека је $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ периодична непрекидна функција, периода 1. Доказати да је

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x) f(nx) dx = \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2.$$

Време за рад: 4 сата

Сваки задатак вреди 10 поена

МАТФ 2015.
Решења задатака

1. Нека постоји тражени избор вектора и нека су то вектори $v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}$. Како вектора има више од димензије простора, они су линеарно зависни. Нека је $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \lambda_i v_i = 0$, где је $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \lambda_i^2 \neq 0$, и нека је $I = \{i \,|\, \lambda_i \geqslant 0\}$, $J = \{1, \ldots, n+1\} \setminus I$. Следи $u = \sum\limits_{i \in I} \mu_i v_i = \sum\limits_{i \in J} \mu_i v_i$, где је $\mu_i = \begin{cases} \lambda_i, & \text{ако је } i \in I \\ -\lambda_i, & \text{ако је } i \in J \end{cases}$ и важи $\mu_i \geqslant 0$ за свако $i \in \{1, \ldots, n+1\}$, као и $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \mu_i^2 \neq 0$. По условима задатка следи $0 \leqslant \langle u, u \rangle = \sum\limits_{i,j \in I} \mu_i \mu_j \langle v_i, v_j \rangle \leqslant 0$, па је $u = 0$.

Ако је v нормални вектор хиперравни H, који одређује страну те хиперравни са које су тражени вектори, онда је $\langle v, v_i \rangle > 0$ за све $i \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$, па следи $0 = \langle u, v \rangle = \sum\limits_{i \in I} \mu_i \langle v_i, v \rangle$, па је $\mu_i = 0$ за $i \in I$. Аналогно је $\mu_i = 0$ за $i \in J$, што је контрадикција са $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \mu_i^2 \neq 0$, па следи да не постоји тражени избор вектора.

2. Ред $S_1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ је конвергентан и са позитивним члановима, па је и апсолутно конвергентан, као и ред $\sum\limits_{m|k} a_k$ за било које $m \in \mathbb{N}$, као и коначна линерана комбинација оваквих редова. Следи да се у реду $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + \sum\limits_{k=1}^{j} \Big[(-1)^k \sum\limits_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant j} \Big(\sum\limits_{p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_k} | n} a_n \Big) \Big]$ (где су $p_1 < \ldots < p_j$ првих j простих бројева) може мењати поредак сабирања. Уколико i није дељив ни са једним од $p_1 < \ldots < p_j$, члан a_i се у S јавља тачно једном (само у првом реду); иначе, ако је дељив са тачно m од ових простих бројева, након мењања поретка сабирања коефицијент уз тај члан ће бити $\sum\limits_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} = 0$. Следи да је $0 \leqslant S - a_1 = \sum\limits_{p_1 \cdot \ldots \cdot p_j \nmid k} p_k \leqslant \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{m+k}$, где су $p_1 < \ldots < p_j$ првих j простих бројева, а $m > 1$ најмањи природан број који није дељив са неким од $p_1, \ldots, p_j$. Како $m \to \infty$ кад $j \to \infty$ и како $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{m+k} \to 0$ кад $m \to \infty$ (ред S_1 је конвергентан), следи да $S \to a_1$ кад $j \to \infty$. Са друге стране, по условима задатка следи $S = S_1 + \sum\limits_{k=1}^{j} \Big[(-1)^k \sum\limits_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant j} \Big(\frac{1}{p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_k}} \cdot S_1 \Big) \Big] = S_1 \cdot \prod\limits_{k=1}^{j} \Big(1 - \frac{1}{p_j} \Big) \to 0$ кад $j \to \infty$ (јер је $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k} = \infty$), па је $a_1 = 0$.

Ако је n најмањи индекс за који је $a_n \neq 0$, $b_k = a_{nk}$ за $k \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{N}$, следи $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_{mk} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{mnk} = \frac{1}{mn} \cdot \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{1}{m} \cdot \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk} = \frac{1}{m} \cdot \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, тј. ред $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ задовољава услове задатке, па по претходном следи $0 = b_1 = a_n$. Из добијене контрадикције следи да је једини ред који задовољава услове задатке ред за који је $a_n = 0$ за свако $n \in \mathbb{N}$.

3. Ако је $x, t \in [0,1]$, по условима задатка је $f(t) = f(x) + f'(x)(t-x) + \frac{f''(\xi)}{2!} \cdot (t-x)^2$ за неко ξ између x и t, па (како је $|f''(\xi)| \leqslant 2$ за свако $\xi \in (0,1)$) следи $|f(t) - f(x) - f'(x)(t-x)| \leqslant (t-x)^2$.

Специјално, за $t = 0$, односно $t = 1$, следи $|f(0) - f(x) + f'(x)x| \leqslant x^2$, односно $|f(1) - f(x) + f'(x)(x-1)| \leqslant (1-x)^2$. Како је максимум функције $x^2 + (1-x)^2$ на $[0,1]$ једнак 1, за свако $x \in (0,1)$ важи

$$\begin{aligned} 1 \geqslant x^2 + (1-x)^2 &\geqslant \big|f(1) - f(x) + f'(x)(x-1)\big| + \big|f(0) - f(x) + f'(x)x\big| \\ &\geqslant \Big|\big(f(1) - f(x) + f'(x)(x-1)\big) - \big(f(0) - f(x) + f'(x)x\big)\Big| \\ &= \Big|\big(f(1) - f(0)\big) - f'(x)\Big| \geqslant |f'(x)| - |f(1) - f(0)|. \end{aligned}$$

4. Израз $p(\omega)=\det(A+\omega B)$ је полином степена највише n. Ако је $p(\omega)=a_n\omega^n+\ldots+a_0$, за $|w|=1$ следи $1=|\det(A+\omega B)|^2=(a_n\omega^n+\ldots+a_0)\cdot\overline{a_n\omega^n+\ldots+a_0}=(a_n\omega^n+\ldots+a_0)\cdot(\overline{a}_n\overline{\omega}^n+\ldots+\overline{a}_0)=(a_n\omega^n+\ldots+a_0)\cdot(\overline{a}_n\cdot\frac{1}{\omega^n}+\ldots+\overline{a}_0)$, па је $\omega^n=(a_n\omega^n+\ldots+a_0)\cdot(\overline{a}_0\omega^n+\ldots+\overline{a}_n)$. Како је последње тачно за све $|\omega|=1$ (бесконачан скуп), ова (полиномска) веза је идентитет, па следи $\omega^n\equiv(a_n\omega^n+\ldots+a_0)\cdot(\overline{a}_0\omega^n+\ldots+\overline{a}_n)$. Притом је $a_n=\det B\neq 0$, па је (изједначавањем коефицијената) $a_0\overline{a}_n=0\Rightarrow a_0=0$ (коефицијент уз ω^0), $a_1\overline{a}_n+a_0\overline{a}_{n-1}=a_1\overline{a}_n=0\Rightarrow a_1=0$ (коефицијент уз ω^1); ако је $k<n$ и $a_0=\ldots=a_{k-1}=0$ следи $a_k\overline{a}_n+\ldots+a_0\overline{a}_{n-k+1}=a_k\overline{a}_n=0\Rightarrow a_k=0$ (коефицијент уз ω^k). Следи $a_0=\ldots=a_{n-1}=0$, па је $|a_n|^2=1$ (коефицијент уз ω^n), тј. $\det(A+\omega B)=a_n\omega^n=\det B\cdot\omega^n$ и притом је $|\det B|=1$.

Следи $\det B\cdot\omega^n=\det(A+\omega B)=\det\big((AB^{-1}+\omega)B\big)=\det\big((-AB^{-1})-\omega\big)\cdot(-1)^n\cdot\det B$, а како матрица поништава свој карактеристични полином, следи $0=\det B\cdot(-AB^{-1})^n$; због комутативности следи $0=\det B\cdot B^{-n}\cdot A^n$, а како је B регуларна, следи $A^n=0$.

Ако су $A=(a_{i,j})_{i,j=1}^n$ и $B=(b_{i,j})_{i,j=1}^n$ дефинисани са

$$a_{i,j}=\begin{cases}1, & \text{ако је } i=j=n\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}\qquad\text{и}\qquad b_{i,j}=\begin{cases}1, & \text{ако је } i=j-1 \text{ или } (i,j)=(1,n)\\ 0, & \text{иначе}\end{cases},$$

следи $A^n=A\neq 0$ и $\det(A+\omega B)=\omega^n$, па тврђење не важи без претпоставке о комутативности.

5. На $G=(\mathbb{Z}_2,+)\times(\mathbb{Z}_2,+)$ се структура прстена са јединицом може увести на неколико начина:

1° $H=\mathbb{Z}_2[x]/(x^2+x+1)$ (поље са 4 елемента), тј. структура у којој је множење дато са

$\cdot$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	a	b	c
b	0	b	c	a
c	0	c	a	b

$(a=1,b=x,c=x+1)$; притом, сваки од 3 ненула елемента $(\mathbb{Z}_2,+)\times(\mathbb{Z}_2,+)$ може играти улогу јединице (a) (тј. xH и $(x+1)H$ су прстени са јединицом у којима су c и b, редом, јединице);

2° $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2+x)$ (изоморфна са $(\mathbb{Z}_2,+,\cdot)\times(\mathbb{Z}_2,+,\cdot)$), тј. структура у којој је множење дато са

$\cdot$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	a	b	c
b	0	b	b	0
c	0	c	0	c

$(a=1,b=x,c=x+1)$

3° $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2+1)$, тј. структура у којој је множење дато са

$\cdot$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	a	b	c
b	0	b	a	c
c	0	c	c	0

$(a=1,b=x,c=x+1)$.

Дакле, на G се структура прстена са јединицом може увести на више од $n(G)=4$ начина (тј. $p(G)\geqslant 5$).

Ако су $(G_1,+_1,\cdot_1)$ и $(G_2,+_2,\cdot_2)$ прстени са јединицом, онда се на $G_1\times G_2$ може увести структура прстена са јединицом (за $a_1,a_2\in G_1$, b_1,b_2 дефинише се $(a_1,b_1)+_{G_1\times G_2}(a_2,b_2)=(a_1+_1b_1,a_2+_2b_2)$ и $(a_1,b_1)\cdot_{G_1\times G_2}(a_2,b_2)=(a_1\cdot_1b_1,a_2\cdot_2b_2)$; ако су i_1 и i_2 јединични елементи G_1 и G_2, редом, онда је при овако дефинисаним операцијама (i_1,i_2) јединични елемент на $G_1\times G_2$; притом, ако је $(+_1,\cdot_1)\neq(+_2,\cdot_2)$, добијају се различите структуре на $G_1\times G_2$). Следи важи $n(G^k)=4^k$ и $p(G^k)\geqslant 5^k$, па је $0<\dfrac{n(G^k)}{p(G^k)}\leqslant\left(\dfrac{4}{5}\right)^k\to 0$ кад $k\to\infty$, одакле је $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{n(G^k)}{p(G^k)}=0$.

Ако је p прост број, $(\mathbb{Z}_p,+_p,\cdot_p)$ има $p-1$ аутоморфизама (то су пресликавања $x\to ax$ за свако $a\neq 0$). Такође, ако је $(p,q)=1$, следи $\mathrm{Aut}(\mathrm{Z}_{pq}\cong\mathrm{Aut}(\mathrm{Z}_p\times\mathrm{Z}_q)\cong\mathrm{Z}_{p-1}\times\mathrm{Z}_{q-1}$, па ако су $p_1<\ldots<p_n$ првих n простих природних бројева и $G_n=\mathbb{Z}_{p_1\cdot\ldots\cdot p_n}$, следи $\dfrac{n(G_n)}{p(G_n)}=\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{p_i}{p_i-1}$, па је $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{n(G_k)}{p(G_k)}=\prod\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{1-\frac{1}{p_k}}=\infty$ (јер је $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{p_k}=\infty$).

6. Како је f непрекидна, достиже максимум и минимум на $\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$ за свако $k\in\{1,\ldots,n\}$. Нека су (неке од) тачака у којима се достижу $a_{n,k}$ и $b_{n,k}$, тј. важи $f(a_{n,k})\leqslant f(t)\leqslant f(b_{n,k})$ за $t\in\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$ и

$a_{n,k}, b_{n,k} \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$. За $t \in [k-1, k]$ следи $f(a_{n,k})f(t) \leqslant f\left(\frac{t}{n}\right)f(t) \leqslant f(b_{n,k})f(t)$, па је $\int_{k-1}^{k} f\left(\frac{t}{n}\right)f(t)dt = f(c_{n,k})\int_{k-1}^{k} f(t)dt$ за неко $c_{n,k} \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, јер је f ненегативна и непрекидна.

Како је f периодична са периодом 1, за свако $k \in \mathbb{N}$ је $\int_{k-1}^{k} f(t)dt = \int_{0}^{1} f(t)dt$, па следи

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)f(nx)dx &= \left\{\begin{array}{c} \textit{смена } t = nx \\ dt = ndx \end{array}\right\} = \frac{1}{n}\cdot\int_0^n f\left(\frac{t}{n}\right)f(t)dt = \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k} f\left(\frac{t}{n}\right)f(t)dt \\
&= \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} f(c_{n,k})\int_{k-1}^{k} f(t)dt = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} f(c_{n,k})}{n}\cdot\int_0^1 f(t)dt \to \left(\int_0^1 f(t)dt\right)^2,
\end{aligned}$$

јер је $\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} f(c_{n,k})}{n}$ интегрална сума функције f (која одговара подели интервала $[0,1]$ на n интервала једнаке дужине и избору међутачака $(c_{n,k})_{k=1}^{n}$).